Scheda N. 2/2008

Seni, coseni e logaritmi complessi

2.1] Seni e coseni circolari e iperbolici

A] Ricordando che i seni e i coseni complessi sono definiti nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\sin z &= (1/2\mathrm{j})(\mathrm{e}^{\mathrm{j}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}) \\ \cos z &= (1/2)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}z})\end{aligned}$$

si calcolino le seguenti espressioni:

$$1)\quad \sin(-\pi/2 + 3\mathrm{j}) \qquad 2)\quad \cos(\pi + \mathrm{j}\log 3) \qquad 3)\quad \sin(\pi/4 + \mathrm{j})$$

si valutino i moduli dei risultati ottenuti dicendo se sono $>$ o $\leq$ di uno.

B] Ricordando che i seni e i coseni iperbolici sono definiti nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\sinh z &= (1/2)(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}) \\ \cosh z &= (1/2)(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z})\end{aligned}$$

si calcolino le seguenti espressioni:

$$1)\quad \sinh(3 - \mathrm{j}\pi/2) \qquad 1)\quad \cosh(\log 3 + \mathrm{j}\pi) \qquad 1)\quad \sinh(1 + \mathrm{j}\pi/4)$$

si valutino i moduli dei risultati ottenuti.

2.2] Logaritmo complesso e z^w

C] Il logaritmo di un numero complesso diverso da zero è definito nel modo seguente:

$$\log z = \log|z| + \mathrm{j}\arg z + 2k\pi\mathrm{j}$$

Si calcoli:

$$\log(-\sqrt{3} + \mathrm{j})$$

si rappresentino sul piano complesso i risultati ottenuti osservando che stanno tutti su una parallela all'asse immaginario e che la distanza tra due di essi è uguale a un multiplo di 2π .

Si calcoli inoltre il seguente logaritmo complesso:

$$\log(-1)$$

Nello svolgere l'esercizio si tenga presente che:

$$-1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{j} + 2k\pi\mathrm{j}}$$

Si osservi poi che non ci sono logartmi reali di -1 .

D] L'esponenziale di base un numero complesso si definisce mediante il logaritmo complesso:

$$z^w = \mathrm{e}^{w \log z}$$

Utilizzando questa definizione si calcoli:

$$\mathrm{j}^{\mathrm{j}}$$

si rappresentino i risultati ottenuti nel piano complesso, osservando che stanno tutti sul semiasse reale positivo e si addensano in zero.

2.3] Zeri di $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ e $\cosh z$

E] Si cerchino gli zeri delle funzioni seno e coseno iperbolici, si risolvano cioè le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \sinh z &= 0 \\ \cosh z &= 0 \end{aligned}$$

Per svolgere l'esercizio si seguano le seguenti indicazioni:

1) si scrivano le funzioni mediante gli esponenziali complessi;

2) si moltiplichino ambo i membri per e^z;

3) per ottenere $2z$ si faccia il logaritmo complesso di 1 o di -1, ricordando che il logaritmo complesso fornisce infiniti valori.

Si rappresentino nel piano complesso i risultai ottenuti, osservando che gli zeri trovati stanno sull'asse immaginario e sono distanti tra loro di multipli di π.

F] Si cerchino gli zeri delle funzioni seno e coseno circolari in ambito complesso, si risolvano cioè le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \sin z &= 0 \\ \cos z &= 0 \end{aligned}$$

Per svolgere l'esercizio si seguano indicazioni analoghe a quelle dell'esercizio precedente. Si osservi che gli zeri del seno e del coseno complessi sono gli stessi del seno e del coseno reali.