

Esponenziale complesso, potenze e radici complesse

1.1] Forma esponenziale

A] Espressione dei numeri complessi in forma esponenziale.

1) Dato il seguente numero complesso

$$z_1 = -8 - 8j$$

Rappresentare z_1 nel piano complesso.

Calcolare:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Re} z_1 = \qquad \qquad |z_1| = \qquad \qquad z_1^* = \\ \mathbf{Im} z_1 = \qquad \qquad \arg z_1 = \end{array}$$

Scrivere z_1 in forma polare trigonometrica.

Scrivere z_1 in forma di esponenziale complesso.

2) Dato il seguente numero complesso

$$z_2 = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

Rappresentare z_2 nel piano complesso.

Calcolare:

$$\begin{array}{l} |z_2| = \\ \arg z_2 = \\ \mathbf{Re} z_2 = \\ \mathbf{Im} z_2 = \\ z_2^* = \end{array}$$

Scrivere z_2 in forma cartesiana.

Scrivere z_2 in forma di esponenziale complesso.

1.2] Prodotti e potenze di numeri complessi

B] Supponendo che z_1 e z_2 siano gli stessi dell'esercizio A]:

1) Calcolare:

$$z_1 + z_2 \qquad \text{e} \qquad z_1 \cdot z_2$$

Nel fare la somma si usino le forme cartesiane, mentre per fare il prodotto si usino le forme polari (trigonometrica o esponenziale).

2) Utilizzando la forma esponenziale, calcolare:

$$z_1^3 \qquad \text{e} \qquad z_2^6$$

rappresentare i numeri complessi così ottenuti nel piano complesso.

1.3] Radici complesse

C] Utilizzando la forma esponenziale, calcolare le radici seguenti:

$$\sqrt[4]{z_1} \quad \text{e} \quad \sqrt[6]{z_2}$$

rappresentare i numeri complessi così ottenuti nel piano complesso.

D] Ricordando che per calcolare le radici di un numero complesso si deve prima scrivere il numero in forma esponenziale, si calcolino le seguenti radici:

$$1) \sqrt[4]{-\sqrt{3} - j} \quad 2) \sqrt[6]{-2 + 2j\sqrt{3}}$$

rappresentare i numeri complessi così ottenuti nel piano complesso.

E] Calcolare le radici complesse seguenti:

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt[2]{j} & \sqrt[3]{j} & \sqrt[4]{j} & \sqrt[5]{j} & \sqrt[6]{j} & \dots \\ \sqrt[2]{-1} & \sqrt[3]{-1} & \sqrt[4]{-1} & \sqrt[5]{-1} & \sqrt[6]{-1} & \dots \\ \sqrt[2]{-j} & \sqrt[3]{-j} & \sqrt[4]{-j} & \sqrt[5]{-j} & \sqrt[6]{-j} & \dots \\ \sqrt[2]{1} & \sqrt[3]{1} & \sqrt[4]{1} & \sqrt[5]{1} & \sqrt[6]{1} & \dots \end{array}$$

Si rappresentino tutte le radici complesse precedenti con un disegno nel piano complesso, osservando che stanno su una circonferenza di raggio uno e sono vertici di poligoni regolari inscritti in tale circonferenza.

1.4] Proprietà del modulo e dell'argomento

F] Ricordando le proprietà seguenti (si provi a ricavarle a partire dalla forma polare di z_1 e di z_2):

$$\begin{array}{lcl} |z_1 z_2| & = & |z_1| |z_2| \quad \quad \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg(z_1 z_2) & = & \arg z_1 + \arg z_2 \quad \quad \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \end{array}$$

si calcoli modulo e argomento del numero complesso z seguente:

$$z = \frac{-2 + 2j}{1 - j\sqrt{3}} e^{-j\pi/2}$$