



## TRASFORMAZIONI DEL PIANO E GRAFICI

### RICHIAMI DI TEORIA

**Definizione:** consideriamo il piano  $\mathbf{R}^2$  munito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Una **trasformazione del piano** è una legge che consente di associare ad ogni punto  $P = (x, y) \in \mathbf{R}^2$  un punto  $P' = (X, Y) \in \mathbf{R}^2$ .

### Esempi di trasformazioni del piano

- **Le traslazioni**

$$\mathbf{t}(p, q): \begin{cases} X = x + p \\ Y = y + q \end{cases} \quad \mathbf{t}^{-1}(p, q): \begin{cases} x = X - p \\ y = Y - q \end{cases}$$

\* Noto il punto  $Q(x_0, y_0)$ , otteniamo le coordinate del punto trasformato  $Q'$  (utilizzando la trasformazione  $\mathbf{t}$ ) mediante la

sostituzione  $\begin{bmatrix} x_0 \rightarrow x_0 + p \\ y_0 \rightarrow y_0 + q \end{bmatrix}$ :  $Q = (x_0, y_0) \xrightarrow{\mathbf{t}(p, q)} Q'(x_0 + p, y_0 + q)$

\* Nota la funzione  $y = f(x)$ , otteniamo l'espressione della sua trasformata (utilizzando la trasformazione inversa  $\mathbf{t}^{-1}$ ) mediante la

sostituzione  $\begin{bmatrix} x \rightarrow x - p \\ y \rightarrow y - q \end{bmatrix}$ :  $y = f(x) \xrightarrow{\mathbf{t}(p, q)} y - q = f(x - p) \Leftrightarrow y = f(x - p) + q$

Il parametro  $p$  indica lo spostamento lungo l'asse  $x$ : se  $p > 0$  si ha una traslazione verso destra, se  $p < 0$  una traslazione verso sinistra. Il parametro  $q$  indica lo spostamento lungo l'asse  $y$ : se  $q > 0$  si ha una traslazione verso l'alto, se  $q < 0$  una traslazione verso il basso.



• **Le dilatazioni**

$$\mathbf{d}(m,n): \begin{cases} X = mx \\ Y = ny \end{cases} \quad \mathbf{d}^{-1}(m,n): \begin{cases} x = \frac{1}{m} X \\ y = \frac{1}{n} Y \end{cases}, \quad m, n \in \mathbf{R}^+$$

\* Noto il punto  $Q(x_0, y_0)$ , otteniamo le coordinate del punto trasformato  $Q'$  mediante la sostituzione  $\begin{bmatrix} x_0 \rightarrow mx_0 \\ y_0 \rightarrow ny_0 \end{bmatrix}$ :

$$Q = (x_0, y_0) \xrightarrow{\mathbf{d}(m,n)} Q'(mx_0, ny_0)$$

\* Nota la funzione  $y = f(x)$ , otteniamo l'espressione della sua trasformata mediante la sostituzione  $\begin{bmatrix} x \rightarrow \frac{1}{m}x \\ y \rightarrow \frac{1}{n}y \end{bmatrix}$ :

$$y = f(x) \xrightarrow{\mathbf{d}(m,n)} \frac{1}{n}y = f\left(\frac{x}{m}\right) \Leftrightarrow y = n \cdot f\left(\frac{x}{m}\right)$$

Il parametro  $m$  indica la dilatazione lungo l'asse  $x$ : se  $m > 1$  il piano viene allungato (nella direzione dell'asse delle ascisse), se  $0 < m < 1$  il piano viene compresso.

Il parametro  $n$  indica la dilatazione lungo l'asse  $y$ : se  $n > 1$  il piano viene allungato (nella direzione dell'asse delle ordinate), se  $0 < n < 1$  il piano viene compresso.



• **Le simmetrie rispetto agli assi e all'origine**

Simmetria rispetto	Equazione	Nota la funzione $y = f(x)$ , otteniamo l'espressione della sua trasformata mediante la sostituzione
asse $x$	$\mathbf{S}_x: \begin{cases} X = x \\ Y = -y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{bmatrix} \quad y = f(x) \xrightarrow{\mathbf{S}_x} y = -f(x)$
asse $y$	$\mathbf{S}_y: \begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow y \end{bmatrix} \quad y = f(x) \xrightarrow{\mathbf{S}_y} y = f(-x)$
origine	$\mathbf{S}_o: \begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{bmatrix} \quad y = f(x) \xrightarrow{\mathbf{S}_o} y = -f(-x)$

• **Le affinità**

$$\mathbf{a}(m,n): \begin{cases} X = mx \\ Y = ny \end{cases} \quad m,n \neq 0$$

**Proposizione:** un'affinità, nel caso in cui almeno uno dei due coefficienti sia negativo, è la composizione di una dilatazione e di una simmetria.



- **Simmetrie rispetto alle bisettrici**

Simmetria rispetto a  $y=x$        $\mathbf{s}_{y=x}:$   $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$

Simmetria rispetto a  $y= -x$        $\mathbf{s}_{y=-x}:$   $\begin{cases} X = -y \\ Y = -x \end{cases}$

### Funzioni pari e funzioni dispari

**Definizione:** una funzione reale di variabile reale è **pari** se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e se per ogni  $x \in \widehat{\mathbf{I}}$  dom  $f$  risulta  $f(-x) = f(x)$ .

Una funzione reale di variabile reale è **dispari** se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e se per ogni  $x \in \widehat{\mathbf{I}}$  dom  $f$  risulta  $f(-x) = -f(x)$ .

Se una funzione è pari il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, se è dispari il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.



**ESEMPI**

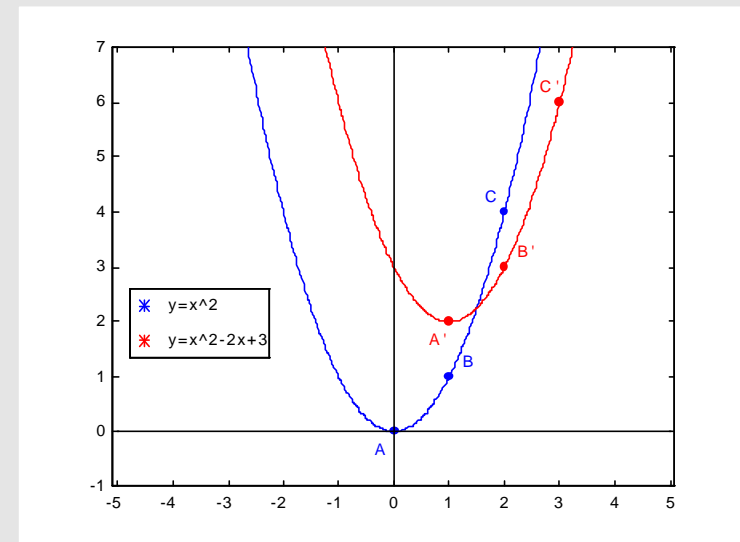
1. Applicare la traslazione  $\mathbf{t}(1, 2)$  alla parabola  $\mathbf{g}$   $y = x^2$ , determinando i trasformati dei suoi punti  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 1)$ ,  $C = (2, 4)$  e l'equazione della sua traslata  $\mathbf{g}'$ .

Per determinare le coordinate dei punti trasformati usiamo la sostituzione  $\begin{bmatrix} x_0 \rightarrow x_0 + 1 \\ y_0 \rightarrow y_0 + 2 \end{bmatrix}$ ; otteniamo:  $A = (0,0) \xrightarrow{\mathbf{t}} A' = (1,2)$   
 $B = (1,1) \xrightarrow{\mathbf{t}} B' = (2,3)$   
 $C = (2,4) \xrightarrow{\mathbf{t}} C' = (3,6)$

Per determinare l'equazione della curva trasformata  $\mathbf{g}'$  utilizziamo la sostituzione  $\begin{bmatrix} x \rightarrow x - 1 \\ y \rightarrow y - 2 \end{bmatrix}$ ;

otteniamo:  $\mathbf{g}: y = x^2 \xrightarrow{\mathbf{t}} \mathbf{g}': y - 2 = (x - 1)^2 \leftrightarrow y = x^2 - 2x + 3$

E' semplice verificare che, come dovevamo aspettarci, i punti  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  appartengono alla parabola  $\mathbf{g}'$ .





2. Assegnate la funzione  $\gamma$ :  $g: y = |x|$  e le trasformazioni  $t(1, -4)$  e  $d\left(3, \frac{1}{2}\right)$ , determinare le equazioni ed i grafici delle curve  $g'$  e  $g''$ , ottenute da  $\gamma$  applicando le trasformazioni composte  $T_1 = t \cdot d$  e  $T_2 = d \cdot t$  rispettivamente.

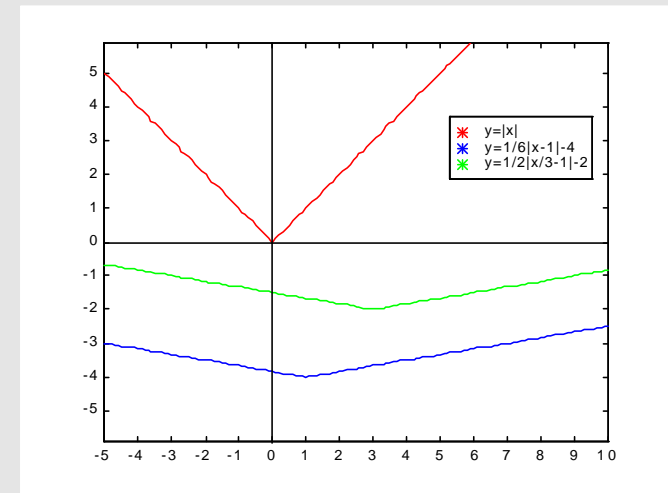
**Definizione:** il **prodotto** (o **composizione**) di due o più **trasformazioni** è l'applicazione successiva delle trasformazioni con la seguente regola: se  $t_1$  e  $t_2$  sono le due trasformazioni, il prodotto  $t_1 \times t_2$  impone che si applichi prima  $t_2$  e poi  $t_1$ , mentre  $t_2 \times t_1$  esattamente il contrario.

In generale il prodotto di trasformazioni non gode della proprietà commutativa.

La trasformazione  $T_1$ , composizione della traslazione  $\tau$  e della dilatazione  $\delta$ , si ottiene applicando prima  $\delta$  e poi  $\tau$ ; mentre la trasformazione  $T_2$  si ottiene applicando prima  $\tau$  e poi  $\delta$ .

- $T_1$ :  $g: y = |x| \xrightarrow{d} 2y = \left|\frac{x}{3}\right| \Leftrightarrow y = \frac{|x|}{6} \xrightarrow{t} g': y + 4 = \frac{|x-1|}{6} \Leftrightarrow y = \frac{|x-1|}{6} - 4$

- $T_2$ :  $g: y = |x| \xrightarrow{t} y + 4 = |x-1| \Leftrightarrow y = |x-1| - 4 \xrightarrow{d} g': 2y = \left|\frac{x}{3} - 1\right| - 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \left|\frac{x}{3} - 1\right| - 2$





3 **Trasformazioni del piano e grafici**

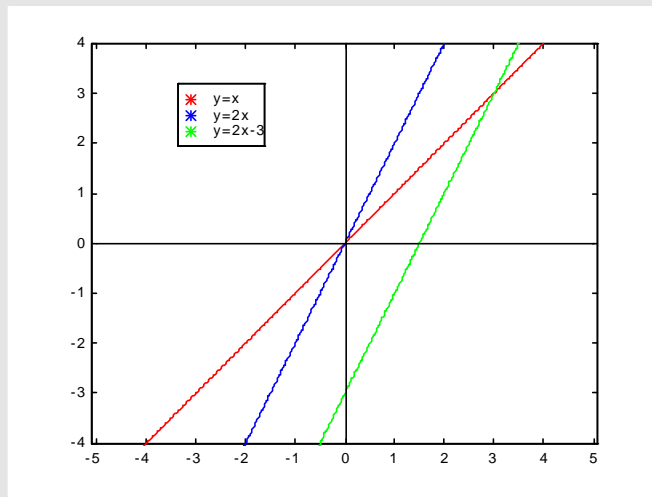
3. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni indicando le trasformazioni che consentono di ottenerli a partire dal grafico di opportune funzioni elementari.

- $y = 2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

Possiamo ottenere il grafico di questa funzione a partire da  $y = x$  utilizzando, ad esempio, le trasformazioni:

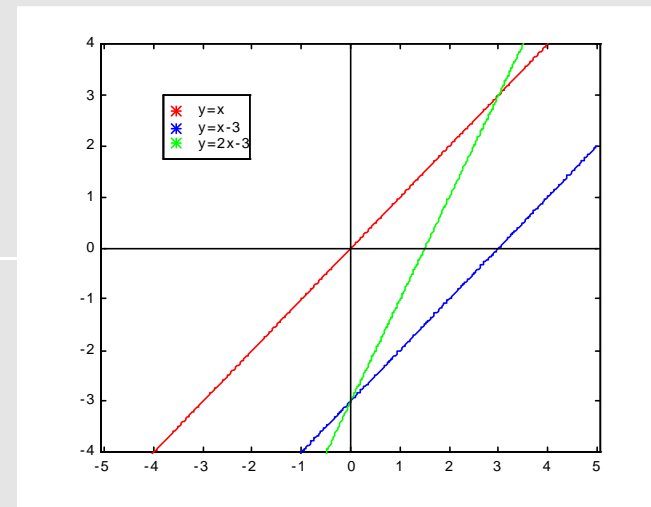
\* Una dilatazione sulle  $y$  di rapporto  $n=2$  ed una traslazione sulle  $x$  verso destra di modulo  $p = 3/2$ :

$$y = x \xrightarrow{d(1,2)} y = 2x \xrightarrow{t\left(0, \frac{3}{2}\right)} y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$



\* Una traslazione sulle  $y$  verso il basso di modulo  $q = -3$  ed una compressione sulle  $x$  di rapporto  $m=1/2$ :

$$y = x \xrightarrow{t(0,-3)} y = x - 3 \xrightarrow{d\left(\frac{1}{2}, 1\right)} y = 2x - 3$$





**3 Trasformazioni del piano e grafici**

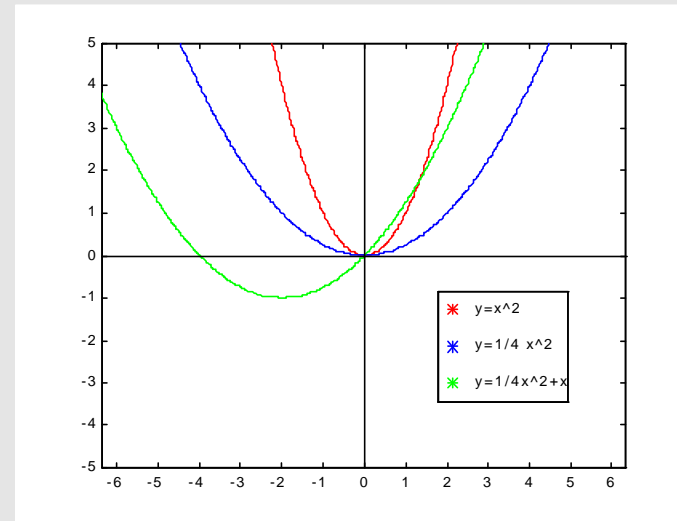
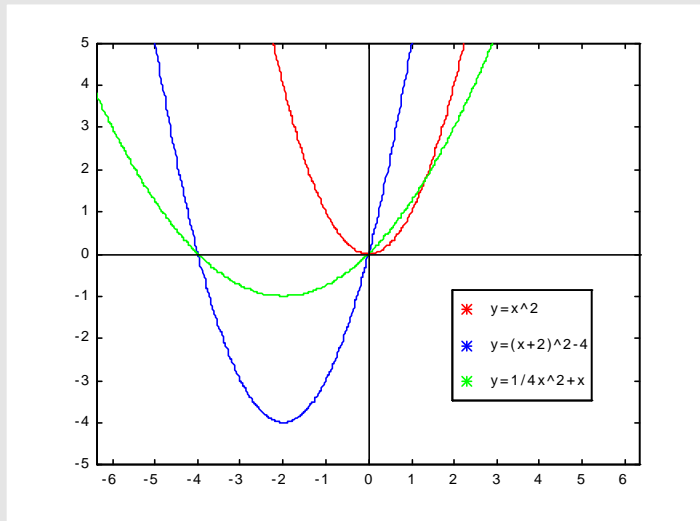
- $y = \frac{1}{4}x^2 + x = \frac{1}{4}(x^2 + 4x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4 - 4) = \frac{1}{4}[(x+2)^2 - 4] = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 1$

Possiamo ottenere il grafico di questa funzione a partire da  $y = x^2$  utilizzando, ad esempio, le trasformazioni:

\* Una traslazione sulle  $x$  verso sinistra di modulo  $p=-2$  e sulle  $y$  verso il basso di modulo  $q= -4$  ed una compressione sulle  $y$  di rapporto  $n=1/4$ :

\* Una dilatazione sulle  $x$  di rapporto  $m=2$  ed una traslazione sulle  $x$  verso sinistra di modulo  $p = -2$  e sulle  $y$  verso il basso di modulo  $q = -1$ :

$$y = x^2 \xrightarrow{t(-2,-4)} y = (x+2)^2 - 4 \xrightarrow{d(1, \frac{1}{4})} y = \frac{1}{4}((x+2)^2 - 4) \quad y = x^2 \xrightarrow{d(2,1)} y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 \xrightarrow{t(-2,-1)} y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 1$$



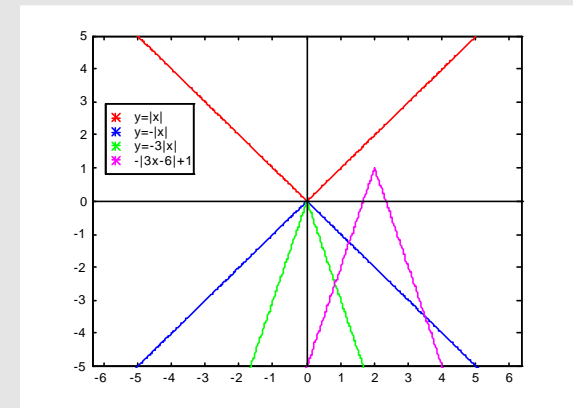


- $y = -|3x - 6| + 1 = -3|x - 2| + 1 = -3\left(|x - 2| - \frac{1}{3}\right)$

Possiamo ottenere il grafico di questa funzione a partire da  $y = |x|$  utilizzando, ad esempio, le trasformazioni:

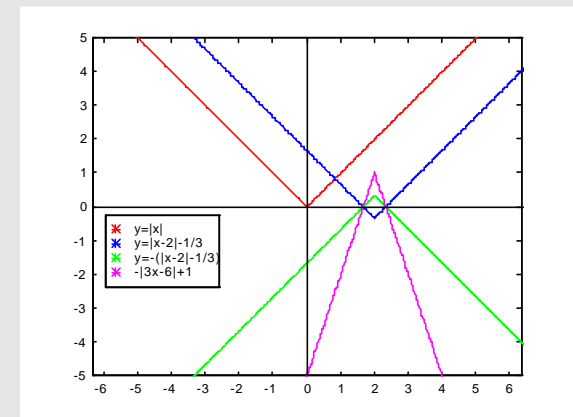
- \* Una simmetria rispetto all'asse  $x$ , una dilatazione su  $y$  di rapporto  $n=3$ , una traslazione su  $x$  verso destra di modulo  $p=2$  e su  $y$  verso l'alto di modulo  $q=1$ .

$$y = |x| \xrightarrow{s_x} y = -|x| \xrightarrow{d(1,3)} y = -3|x| \xrightarrow{t(2,1)} y = -3|x - 2| + 1$$



- \* Una traslazione su  $x$  verso destra di modulo  $p=2$  e su  $y$  verso il basso di modulo  $q=-1/3$ , una simmetria rispetto all'asse  $x$ , una dilatazione su  $y$  di rapporto  $n=3$ :

$$y = |x| \xrightarrow{t(2, -\frac{1}{3})} y = |x - 2| - \frac{1}{3} \xrightarrow{s_x} y = -\left(|x - 2| - \frac{1}{3}\right) \xrightarrow{d(1,3)} y = -3\left(|x - 2| - \frac{1}{3}\right)$$



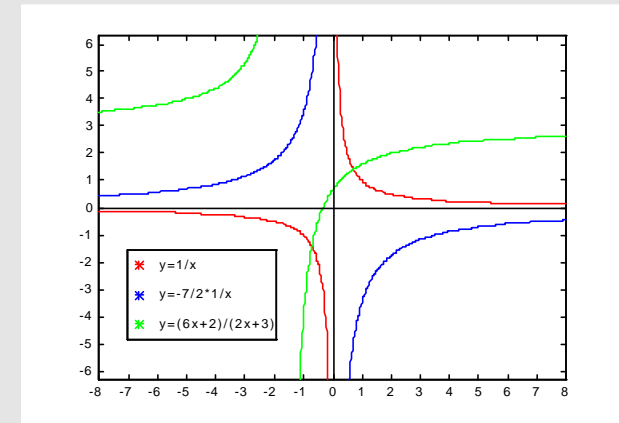


$$\bullet \quad y = \frac{6x+2}{2x+3} = -\frac{7}{2x+3} + 3 = -\frac{\frac{7}{2}}{x+\frac{3}{2}} + 3 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x+\frac{3}{2}} + 3$$

Possiamo ottenere il grafico di questa funzione a partire da  $y = \frac{1}{x}$  utilizzando, ad esempio, la seguente trasformazione:

un'affinità di rapporti  $m=1$ ,  $n=-7/2$  ed una traslazione di moduli  $p=-3/2$  e  $q=3$ .

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{a\left(1, -\frac{7}{2}\right)} y = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{t\left(-\frac{3}{2}, 3\right)} y = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x + \frac{3}{2}} + 3$$



4. Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

•  $f(x) = x^2 + 4$  : è una funzione pari, poiché  $f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$

•  $f(x) = 5 \cdot x^3$  : è una funzione dispari, poiché  $f(-x) = 5 \cdot (-x)^3 = -5 \cdot x^3 = -f(x)$

•  $f(x) = x^2 + x + 1$ : non è né pari né dispari, poiché  $f(-x) = (-x)^2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 1 \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$